1

座標変換は

$$\begin{aligned} x &= R\sin\chi\sin\theta\cos\phi \\ y &= R\sin\chi\sin\theta\sin\phi \\ z &= R\sin\chi\cos\theta \\ w &= R\cos\chi \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= R\cos\chi\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\chi + R\sin\chi\cos\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\theta - R\sin\chi\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}y &= R\cos\chi\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\chi + R\sin\chi\cos\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta + R\sin\chi\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}z &= R\cos\chi\cos\theta\,\mathrm{d}\chi - R\sin\chi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}w &= -R\sin\chi\,\mathrm{d}\chi \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、誘導計量は

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 =& \quad \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}w^2 \\ =& \left(R^2\cos^2\chi\sin^2\theta\cos^2\phi + R^2\cos^2\chi\sin^2\theta\sin^2\phi + R^2\cos^2\chi\cos^2\theta + R^2\sin^2\chi \right)\mathrm{d}\chi^2 \\ &+ \left(R^2\sin^2\chi\cos^2\theta\cos^2\phi + R^2\sin^2\chi\cos^2\theta\sin^2\phi + R^2\sin^2\chi\sin^2\theta \right)\mathrm{d}\theta^2 \\ &+ \left(R^2\sin^2\chi\sin^2\theta\sin^2\phi + R^2\sin^2\chi\sin^2\theta\cos^2\phi \right)\mathrm{d}\phi^2 \\ &+ \left(2R^2\cos\chi\sin\chi\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi + 2R^2\cos\chi\sin\chi\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi + 2R^2\cos\chi\sin\chi\cos\theta\sin\theta \right)\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\theta \\ &+ \left(-2R^2\cos\chi\sin\chi\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + 2R^2\cos\chi\sin\chi\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi \right)\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\phi \\ &+ \left(-2R^2\sin^2\chi\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi + 2R^2\sin^2\chi\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi \right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

であり、さらに整理すると

$$\mathrm{d}s^2 = R^2\,\mathrm{d}\chi^2 + R^2\sin^2\chi\,\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\chi\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 \tag{1.1}$$

を得る。

2

4 次元空間で、計量として

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}w^2$$

を与える。座標変換

$$\begin{aligned}
x &= R\sinh\chi\sin\theta\cos\phi \\
y &= R\sinh\chi\sin\theta\sin\phi \\
z &= R\sinh\chi\cos\theta \\
w &= R\cosh\chi
\end{aligned}$$

を考えると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= R\cosh\chi\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\chi + R\sinh\chi\cos\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\theta - R\sinh\chi\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\
\mathrm{d}y &= R\cosh\chi\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\chi + R\sinh\chi\cos\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta + R\sinh\chi\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\phi \\
\mathrm{d}z &= R\cosh\chi\cos\theta\,\mathrm{d}\chi - R\sinh\chi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{d}w &= R\sinh\chi\,\mathrm{d}\chi
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、誘導計量は

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 =& \ \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - \mathrm{d}w^2 \\
=& \left(R^2\cosh^2\chi\sin^2\theta\cos^2\phi + R^2\cosh^2\chi\sin^2\theta\sin^2\phi + R^2\cosh^2\chi\cos^2\theta - R^2\sinh^2\chi \right)\mathrm{d}\chi^2 \\
&+ \left(R^2\sinh^2\chi\cos^2\theta\cos^2\phi + R^2\sinh^2\chi\cos^2\theta\sin^2\phi + R^2\sinh^2\chi\sin^2\theta \right)\mathrm{d}\theta^2 \\
&+ \left(R^2\sinh^2\chi\sin^2\theta\sin^2\phi + R^2\sinh^2\chi\sin^2\theta\cos^2\phi \right)\mathrm{d}\phi^2 \\
&+ \left(2R^2\cosh\chi\sinh\chi\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi + 2R^2\cosh\chi\sinh\chi\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi - 2R^2\cosh\chi\sinh\chi\cos\theta\sin\theta \right)\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\theta \\
&+ \left(-2R^2\cosh\chi\sinh\chi\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi - 2R^2\cosh\chi\sinh\chi\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi \right)\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\phi \\
&+ \left(-2R^2\sinh^2\chi\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi - 2R^2\sinh^2\chi\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi \right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

であり、さらに整理すると

$$\mathrm{d}s^2 = R^2\,\mathrm{d}\chi^2 + R^2\sinh^2\chi\,\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sinh^2\chi\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 \tag{2.1}$$

を得る。

3

■平坦な空間　平坦な空間の極座標における計量は

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)$$

である。これは、$k=0$ の場合に相当する。

■正の定曲率空間　計量 (1.1) は、正の定曲率空間の計量である。変数変換

$$r = R\sin\chi$$

を行うと

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \frac{\mathrm{d}r^2}{\cos^2\chi} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\\ &= \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r^2}{R^2}} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\end{aligned}$$

を得る。これは $k=1$ の場合に相当する。

■負の定曲率空間　計量 (2.1) は、負の定曲率空間の計量である。変数変換

$$r = R\sinh\chi$$

を行うと

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \frac{\mathrm{d}r^2}{\cosh^2\chi} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\\ &= \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\frac{r^2}{R^2}} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\end{aligned}$$

を得る。これは $k=-1$ の場合に相当する。