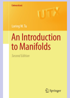
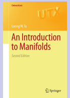


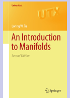
18.4 Smooth k-Forms

佐野博亮

2025 年 04 月 01 日



目次



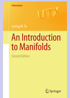
チャートにおける k-形式の滑らかさ

補題 18.6

k-形式 ω が (2) の条件を満たすとする。M を n 次元多様体、ω を M 上の k-形式とする。$(U, x^1, \ldots, x^n)$ を M 上のチャートとして、ω を

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_{k,n}} a_I \, \mathrm{d}x^I$$

と表す。このとき、ω が滑らかであることと、すべての a_I が U 上で滑らかであることは同値である。



18.4 Smooth k-Forms

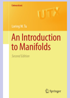
佐野博亮

チャートにおける k-形式の滑らかさ

この補題の証明は 2 通りある。1 つ目は、k-形式がバンドル $\pi\colon \bigwedge^k(T^*U) \to M$ の切断であることを用いる方法である。2 つ目は、$\bigwedge^k(T^*U)$ に入れた多様体の局所座標関数を直接用いる方法である。

証明①

補題 12.12 より直ちに従う。



チャートにおける k-形式の滑らかさ

証明②

$r = \binom{n}{k}$ とし、$(\bigwedge^k(T^*U), \tilde{\phi}) = (\bigwedge^k(T^*U), \phi, \{c_I\}_{I \in \mathcal{I}})$ を $\bigwedge^k(T^*M)$ の局所座標とする。

$\tilde{\phi}\colon \bigwedge^k(T^*U) \to U \times \mathbb{R}^r$ は微分同相写像であるから、$\omega\colon U \to \bigwedge^k(T^*U)$ が滑らかであることと、$\tilde{\phi} \circ \omega\colon U \to U \times \mathbb{R}^r$ が滑らかであることは同値である。

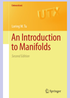
任意の $p \in U$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\phi} \circ \omega)(p) &= \phi(\omega_p) \\
&= (x^1(p), \ldots, x^n(p),\, c_{I_1}(p), \ldots, c_{I_r}(p))
\end{aligned}
$$

ここで、$\omega_p = \sum c_I(\omega_p)\,\mathrm{d}x^I|_p$ と表されることから

$$
= (x^1(p), \ldots, x^n(p),\, c_{I_1}(\omega_p), \ldots, c_{I_r}(\omega_p))
$$

が成り立つ。$x^1, \ldots, x^n$ はすべて滑らかであるから、ω が滑らかであることと、すべての c_I が滑らかであることは同値である。■

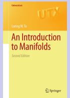


k-形式の滑らかさ

命題 18.7

M を n 次元多様体とし、ω を M 上の k-形式とする。このとき、以下は互いに同値である。

1. k-形式 ω は M 上で滑らかである。
2. ある M のアトラスが存在し、そのアトラスに属するすべてのチャート $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ について、係数 a_I $(I \in \mathcal{I}_{k,n})$ を用いて $\omega = \sum a_I \, \mathrm{d}x^I$ と表したとき、すべての係数 a_I が滑らかである。
3. M 上のすべてのチャート $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ について、係数 a_I $(I \in \mathcal{I}_{k,n})$ を用いて $\omega = \sum a_I \, \mathrm{d}x^I$ と表したとき、すべての係数 a_I が滑らかである。
4. 任意の k 個の滑らかなベクトル場 $X_1, \dots, X_k$ について、関数 $\omega(X_1, \dots, X_k)$ が滑らかである。



k-形式の滑らかさ

証明 (1)⇒(4) 1/2

ω を滑らかな k-形式、$X_1, \ldots, X_k$ を滑らかなベクトル場とする。

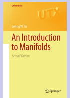
任意の M のチャート $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ を与える。補題 18.6 より、k-形式 ω は滑らかな関数 a_I $(I \in \mathcal{I}_{k,n})$ を用いて

$$\omega = \sum_I a_I \, \mathrm{d}x^I$$

と表される。また、補題 14.1 より、すべてのベクトル場 X_l は滑らかな関数 $b_l^{j_l}$ $(j_l \in \{1, \ldots, n\})$ を用いて

$$X_l = \sum_{j_l} b_l^{j_l} \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}$$

と表される。



k-形式の滑らかさ

証明 (1)⇒(4) 2/2

これらの滑らかな関数を用いると、$\omega(X_1,\ldots,X_k)$ は

$$
\begin{aligned}
\omega(X_1,\ldots,X_k) &= \sum_I a_I \, \mathrm{d}x^I \left(\sum_{j_1} b_1^{j_1} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \sum_{j_k} b_k^{j_k} \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) \\
&= \sum_I \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_k} a_I b_1^{j_1} \cdots b_k^{j_k} \, \mathrm{d}x^I \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) \\
&= \sum_I \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_k} a_I b_1^{j_1} \cdots b_k^{j_k} \delta^I_{j_1,\ldots,j_k} \\
&= \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_k} a_{j_1,\ldots,j_k} b_1^{j_1} \cdots b_k^{j_k}
\end{aligned}
$$

と表されるので、$\omega(X_1,\ldots,X_k)$ は U 上で滑らかである。

チャート (U,ϕ) は任意であるから、$\omega(X_1,\ldots,X_k)$ は M 上で滑らかである。 ■

k-形式の滑らかさ

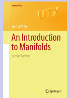
証明 (4)⇒(3)

$(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ を M のチャートとし、k-形式 ω が (4) の条件を満たすとする。k-形式 ω を、係数 a_J $(J \in \mathcal{I}_{k,n})$ を用いて $\omega = \sum_J a_J \,\mathrm{d}x^J$ と表す。

任意の添字 $I \in \mathcal{I}_{k,n}$ を与え、I の要素を $I = (i_1, \ldots, i_k)$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) &= \sum_J a_J \,\mathrm{d}x^J\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) \\ &= \sum_J a_J \delta^J_{i_1,\ldots,i_k} \\ &= a_I\end{aligned}$$

が成り立つ。仮定より、これは滑らかな関数であるから、a_I は滑らかである。 ■



k-形式の滑らかさ

証明 (3)⇒(2)

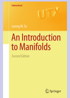
明らか ■

証明 (2)⇒(1)

k-形式 ω が (2) の条件を満たすとする。

任意の M のチャート $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ を与える。仮定より、k-形式 ω は、滑らかな係数 a_I $(I \in \mathcal{I}_{k,n})$ を用いて $\omega = \sum_I a_I \, \mathrm{d}x^I$ と表される。補題 18.6 より、ω は U 上で滑らかである。

チャート (U, ϕ) は任意であるから、ω は M 上で滑らかである。 ■



k-形式の滑らかさ

0-形式の滑らかさ

0-テンソルおよび 0-コベクトルは定数と定義された。

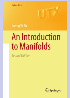
$$L_0(V) = A_0(V) = \mathbb{R}$$

したがって、バンドル $\bigwedge^0(T^*M)$ は $M \times \mathbb{R}$ であり、M 上の 0-形式は M 上の関数である。よって、M 上の滑らかな 0-形式は単に M 上の滑らかな関数を指す。

$$\Omega^0(M) = \Gamma\left(\bigwedge^0(T^*M)\right) = \Gamma(M \times \mathbb{R}) = C^\infty(M)$$

- 12.4,18.3 章

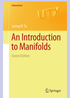
$\Omega^0(M)$	M 上の滑らかな 0-形式全体
$\Gamma(E)$	バンドル E の滑らかな切断全体



微分形式の滑らかな拡張

命題 18.8

p を多様体 M の点、τ を点 p の近傍 U 上で定められた滑らかな微分形式とする。このとき、ある M 上の滑らかな微分形式 $\tilde{\tau}$ が存在し、ある点 p の近傍で τ と一致する。



微分形式の滑らかな拡張

証明

演習 13.1 より、U を台に持つ q における滑らかな隆起関数 $\rho\colon M \to \mathbb{R}$ であって、ある p の開近傍 V 上で 1 であるものが存在する。ここで、微分形式 $\tilde{\tau}$ を

$$\tilde{\tau}(q) = \rho(q)\tau(q)$$

と定義する。

ρ, τ は共に U 上で滑らかであるから、$\tilde{\tau}$ は U 上で滑らかである。また、$M \setminus \operatorname{supp}\rho$ は開集合であるから、任意の $q \in M \setminus U \subset M \setminus \operatorname{supp}\rho$ に対してある開近傍が存在して $\tilde{\tau}(q) = 0$ が成り立つので、$\tilde{\tau}$ は q において滑らかである。したがって、$\tilde{\tau}$ は M 上で滑らかである。

一方、ρ は V 上で 1 であるから、$\tilde{\tau}$ は V 上で τ と一致する。 ■